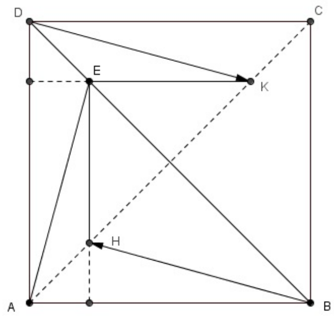
Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 19 martie 2016
CLASA a 9-a
Soluţii şi bareme

Problema 1. Fie $ABCD$ un pătrat şi E un punct situat pe diagonala BD, diferit de mijlocul acesteia. Se notează cu H şi K ortocentrele triunghiurilor ABE, respectiv ADE. Să se arate că $\overline{BH} + \overline{DK} = 0$.

Soluţie.



Se observă că punctele H şi K se află pe diagonala AC, deoarece AC este perpendiculară pe BE şi DE. . . . 2p

De asemenea, H şi K se află pe înălţimile duse din E în cele două triunghiuri, care sunt perpendiculare pe laturile pătratului iniţial. . . . 2p

Deducem că triunghiul EHK este dreptunghic isoscel, aşadar H şi K sunt simetrice faţă de centrul pătratului. Cum şi B, D sunt simetrice faţă de centrul pătratului, obţinem concluzia dorită. . . . 3p

Problema 2. Fie a şi n două numere naturale nenule, astfel încât $\{\sqrt{n+\sqrt{n}}\} = \{\sqrt{a}\}$. Arătaţi că $4a+1$ este pătrat perfect.

Soluţie. Condiţia din enunţ este echivalentă cu $\sqrt{n+\sqrt{n}} = \sqrt{a} + k$, $k \in \mathbb{Z}$. Rezultă că $n + \sqrt{n} = a + 2k\sqrt{a} + k^2$, deci $\sqrt{n} = 2k\sqrt{a} + b$, unde $b = k^2 - n + a$. Deducem că $n = 4k^2a + b^2 + 4kb\sqrt{a}$, de unde rezultă că $kb\sqrt{a}$ este raţional.

. . . **2 puncte**

Dacă $\sqrt{a}$ este raţional, atunci a este pătrat perfect, deci $n + \sqrt{n}$ e pătrat perfect; în particular, $n = m^2$, $m \in \mathbb{N}$. Rezultă că $m^2 + m$ este pătrat perfect şi cum $m^2 \leq m^2 + m < (m+1)^2$, obţinem $m = 0$, deci $n = 0$ — contradicţie.

. . . **2 puncte**

Prin urmare, $kb = 0$. Pentru $b = 0$, obţinem $n = k^2 + a$ şi $n = 4k^2a$, de unde $a = k^2/(4k^2-1) < 1$ — contradicţie. . . . **1 punct**

Aşadar, $k = 0$, de unde $n = b^2$ şi $a = b + n$, deci $a = b^2 + b$ şi $4a + 1 = (2b+1)^2$. . . . **2 puncte**

Problema 3. Fie numerele reale pozitive a, b, c, astfel încât

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} \leq 1.$$

Să se arate că

$$\frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{a+c+1} + \frac{1}{a+b+1} \geq 1.$$

Soluţie. Din inegalitatea dintre media aritmetică şi media armonică deducem că

$$\left(\sum (b+c+1)\right) \sum \frac{1}{b+c+1} \geq 9,$$

de unde

$$\left(a+b+c+\frac{3}{2}\right) \sum \frac{1}{b+c+1} \geq \frac{9}{2}.$$

....2p

Avem însă
$$\left(a+b+c+\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{b+c+1}=\frac{a}{b+c+1}+1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b+c+1},$$
şi analoagele, de unde rezultă
$$\sum\frac{a}{b+c+1}+3+\frac{1}{2}\sum\frac{1}{b+c+1}\geq\frac{9}{2}$$
şi apoi
$$\frac{1}{2}\sum\frac{1}{b+c+1}\geq\frac{3}{2}-\sum\frac{a}{b+c+1}.$$
....3p

Dacă $\sum\frac{a}{b+c+1}\leq 1$, atunci avem
$$\frac{1}{2}\sum\frac{1}{b+c+1}\geq\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2},$$
de unde concluzia..2p

Soluţie alternativă. Fie $S=\sum\frac{1}{b+c+1}$. Din enunţ,
$$\sum\left(\frac{a}{b+c+1}+1\right)\leq 4,$$
de unde $(a+b+c+1)S\leq 4$. .... **3 p**

Din inegalitatea dintre mediile aritmetică şi armonică, rezultă
$$S\geq\frac{9}{2(a+b+c+1)+1},$$
deci $S\geq 9-2(a+b+c+1)S\geq 1$. .... **4 p**

Problema 4. Fie $a\geq 2$ un număr natural. Să se arate că afirmaţiile următoare sunt echivalente:

a) Există numerele naturale nenule b,c, astfel încât $a^2=b^2+c^2$;

b) Există un număr natural nenul d, astfel încât ecuaţiile $x^2-ax+d=0$ şi $x^2-ax-d=0$ au rădăcinile întregi.

Soluţie. Să presupunem că $a^2=b^2+c^2$. Numerele b şi c nu pot fi ambele impare (suma a două numere impare e de forma $4k+2$ şi nu poate fi pătrat), deci cel puţin unul dintre ele este par, adică produsul bc este par...... 1p

Discriminanţii celor două ecuaţii sunt $\Delta_1=a^2-4d$ şi $\Delta_2=a^2+4d$. Alegem $d=\frac{bc}{2}$ şi avem
$$\Delta_1=a^2-4d=b^2+c^2-4\frac{bc}{2}=(b-c)^2,$$
iar rădăcinile primei ecuaţii sunt $x_{1,2}=\frac{a\pm(b-c)}{2}$. Se observă că $x_{1.2}$ sunt numere întregi (dacă b,c sunt ambele pare, şi a va fi par, iar dacă b,c au parităţi diferite, a va fi impar, ca şi $b-c$). Similar se arată că şi a doua ecuaţie are rădăcinile întregi. 2p

Reciproc, să presupunem că ecuaţiile au rădăcini întregi. Atunci discriminanţii acestora trebuie să fie pătrate perfecte. Fie $\Delta_1=u^2$ şi $\Delta_2=v^2$. 1p

Avem, deci
$$a^2-4d=u^2,$$
$$a^2+4d=v^2.$$
Deducem uşor că numerele u,v şi a au aceeaşi paritate...1p

Adunând relaţiile, obţinem
$$a^2=\frac{u^2+v^2}{2}=\left(\frac{u+v}{2}\right)^2+\left(\frac{u-v}{2}\right)^2,$$
deci, alegând $b=\frac{u+v}{2}$ şi $c=\frac{u-v}{2}$, numerele b şi c sunt întregi şi $a^2=b^2+c^2$................................. 2p