ROMANIA
MINISTERUL EDUCATIEI NAȚIONALE
COLEGIUL NATIONAL ALEXANDRU IOAN CUZA
Strada Cuza-Voda nr. 47, Focsani 620034, Vrancea, Romania
Tel. 0040.237.226.840 Fax: 0337100243, E-mail: collegecnaic@yahoo.com,Web:www.cnaic.ro

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI"

Etapa locală – Vrancea, 16.02.2019
Clasa a XI-a filiera teoretică: profil real, specializarea ştiinţe ale naturii

SUBIECTUL 1

Arătați ca valoarea determinantului

$$D=\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ b-c-a & 2b & 2b \\ 2c & c-a-b & 2c \end{vmatrix} \quad ; a, b, c \in N$$

este cubul unui număr natural.

SUBIECTUL 2

Se consideră mulțimea $V = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} / x \epsilon \{0; 1; 2\} \right\}$

a) Studiați dacă există $x, y \epsilon \{0; 1; 2\}$ pentru care $A(x) \cdot A(y) \epsilon V$.

b) Arătați că pentru $B = A(1) \epsilon V, B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, n \epsilon N^*$

SUBIECTUL 3.

Considerăm funcția $f: R \to R$, cu proprietatea: $|f(x) - sin^3 2x| \leq x^4$, oricare ar fi $x \in R$. Calculați $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x)}{x^3}$.

SUBIECTUL 4.

Se consideră funcția $f: D \to R, f(x) = \frac{x^2+ax+}{x^2+2x+b}, a, b \epsilon R$. Determinați $b \epsilon R$ astfel încât graficul funcției să admită o singură asimptotă verticală; în acest caz, determinați $a \epsilon R$ astfel încât graficul funcției să nu intersecteze asimptota orizontală.

Subiecte propuse de:
prof .Teodor Mihai –C.N Al. I. Cuza, Focşani
prof .Oancia Silvia –C.N Al. I. Cuza, Focşani

Notă:
Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.

ROMANIA
MINISTERUL EDUCATIEI NAȚIONALE
COLEGIUL NATIONAL ALEXANDRU IOAN CUZA
Strada Cuza-Voda nr. 47, Focsani 620034, Vrancea, Romania
Tel. 0040.237.226.840 Fax: 0337100243, E-mail: collegecnaic@yahoo.com,Web:www.cnaic.ro

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – Vrancea, 16.02.2019

Clasa a XI-a filiera teoretică: profil real, specializarea ştiinţe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

SUBIECTUL 1

Arătați ca valoarea determinantului

$$D=\begin{vmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ b-c-a & 2b & 2b \\ 2c & c-a-b & 2c \end{vmatrix} \quad ; a,b,c \in N$$

este cubul unui număr natural.

Soluție : Adunand toate liniile la prima linie obținem:

$$D=\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b-c-a & 2b & 2b \\ 2c & c-a-b & 2c \end{vmatrix} = \ldots\ldots 2p$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b-c-a & 2b & 2b \\ 2c & c-a-b & 2c \end{vmatrix} \underline{\underline{C2-C1}} \atop C3-C2 \ldots\ldots 1p$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b-c-a & a+b+c & 0 \\ 2c & -(a+b+c) & c+a+b \end{vmatrix} = \ldots\ldots 2p$$

$= (a+b+c)\,(a+b+c)^2 = (a+b+c)^3$ ……2p

SUBIECTUL 2

Se consideră mulțimea $V=\left\{A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} / x\epsilon\{0;1;2\}\right\}$

a) Studiați dacă există $x, y\epsilon\{0;1;2\}$ pentru care $A(x)\cdot A(y)\epsilon V$.

b) Arătați că pentru $B=A(1)\epsilon V, B^n=\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, n\epsilon N^*$

Soluție

a) $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix} 1 & 1+y & 2+y \\ 0 & xy & x+y \\ 0 & 0 & xy \end{pmatrix}$ ……2p

ROMANIA
MINISTERUL EDUCATIEI NAȚIONALE
COLEGIUL NATIONAL ALEXANDRU IOAN CUZA
Strada Cuza-Voda nr. 47, Focsani 620034, Vrancea, Romania
Tel. 0040.237.226.840 Fax: 0337100243, E-mail: collegecnaic@yahoo.com,Web:www.cnaic.ro

$A(x) \cdot A(y) \epsilon V$ $deci$: $1 + y = 1$ si $2 + y = 1$, $absurd$

$\nexists$ $x, y \epsilon \{0; 1; 2\}$ pentru care $A(x) \cdot A(y) \epsilon V$…………………………………..1p

b) $B = I_2 + C, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$……………………………………………….2p

Se calculeaza B^n folosind binomul lui Newton și se obține rezultatul cerut…2p

SUBIECTUL 3

Considerăm funcția $f: R \to R$, cu proprietatea: $|f(x) - sin^3 2x| \leq x^4$, oricare ar fi $x \in R$.

Calculați $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x)}{x^3}$.

Soluție

Putem scrie $-x^4 + sin^3 2x \leq f(x) \leq x^4 + sin^3 2x, (\forall) x \epsilon R$………………..……….2p

Se obține $-x + \frac{sin^3 2x}{8x^3} \cdot 8 \leq \frac{f(x)}{x^3} \leq x + \frac{sin^3 2x}{8x^3} \cdot 8$, $(\forall) x \epsilon R^*$………………………..……..3p

Trecem la limită, se obține $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x)}{x^3} = 8$………………………………………..2p

SUBIECTUL 4.

Se consideră funcția $f: D \to R, f(x) = \frac{x^2+ax+}{x^2+2x+b}, a, b \epsilon R$. Determinați $b \epsilon R$ astfel încât graficul funcției să admită o singură asimptotă verticală; în acest caz, determinați $a \epsilon R$ astfel încât graficul funcției să nu intersecteze asimptota orizontală.

Soluție

$\Delta = 0, 4 - 4b = 0, b = 1$……………………………………………………………2p

$y = 1$ ecuația asimptotei orizontale…………………………………………………1p

Condiția $\frac{x^2+ax+2}{x^2+2x+b} = 1$ nu are solutii reale în domeniul de definiție, $D = R - \{-1\}$……2p

$a = 2$……………………………………………………………………………………2p