

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
„ADOLF HAIMOVICI”

profil real, specializarea științele naturii

Faza locală-16.02.2019

CLASA A XII-A

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție :

$$x * y = x \cdot y - k \cdot (x + y) + k^2 + k, \forall x, y \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R} - \text{fixat}.$$

- a) Să se arate că mulțimea  $G = (k, \infty)$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{R}$  în raport cu legea definită.  
b) Să se calculeze  $(-2019) * (-2018) * \dots * 2018 * 2019$  pentru  $k = 2019$ , demonstrând și asociativitatea legii în acest caz.

2. Calculați  $\int \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 1} dx, x \in \mathbb{R}$

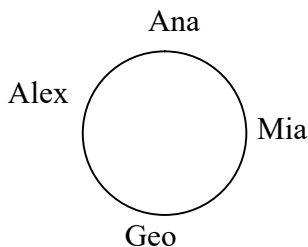
3. Considerăm că în jurul unei mese stau așezate patru persoane așezate în sens orar în ordinea Ana, Mia, Geo și Alex ca în desenul de mai jos . Pe mulțimea celor patru persoane se consideră legea de compoziție

$x \circ y =$  persoana care se află la dreapta lui  $y$  , de exemplu

$Ana \circ Mia = Ana$  ( Ana stă la dreapta lui Mia ) sau

$Geo \circ Ana = Alex$  ( Alex stă la dreapta lui Ana ).

Alcătuieți tabla legii de compoziție și stabiliți dacă legea ” $\circ$ ” este bine definită, asociativă, comutativă și dacă admite element neutru .



4. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0 \\ x \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$ . Arătați că  $f$  admite primitive pe  $\mathbb{R}$  și determinați o primitivă pentru  $f$ .

Propunător : prof. Uleanu Cătălin, CNAIC

**Notă:** Timp de lucru 3 ore.  
Toate subiectele sunt obligatorii.  
Fiecare subiect este notat cu maxim 7 puncte.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
„ADOLF HAIMOVICI”**

profil real, specializarea științele naturii

Faza locală-16.02.2019

**Barem de corectare**

**CLASA A XII-A**

1. a)  $x * y = x \cdot y - k \cdot (x + y) + k^2 + k = (x - k)(y - k) + k, \forall x, y \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1p$   
 $x, y > k \Rightarrow (x - k)(y - k) > 0 \Rightarrow x * y > k \dots\dots\dots 3p$   
 b) asociativitatea  $(x * y) * z = x * (y * z) = (x - k)(y - k)(z - k) + k, \forall x, y, z \dots\dots 1p$   
 $x * k = k, \forall x \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1p$   
 deci  $(-2019) * (-2018) * \dots * 2018 * 2019 = 2019 (k = 2019) \dots\dots\dots 1p$

2.  $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 1} = 1 + \frac{3x + 1}{x^2 + 1} = 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} \dots\dots\dots 4p$

Finalizare cu  $\int \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 1} dx = x + \frac{3}{2} \ln(x^2 + 1) + \arctg x + C \dots\dots\dots 3p$

3. Tabla legii  $\dots\dots\dots 4p$

o	Ana	Mia	Geo	Alex
Ana	Alex	Ana	Mia	Geo
Mia	Alex	Ana	Mia	Geo
Geo	Alex	Ana	Mia	Geo
Alex	Alex	Ana	Mia	Geo

Legea este bine definită dar nu este asociativă  $Ana \circ (Geo \circ Mia) = Ana \circ Ana = Alex$   
 $(Ana \circ Geo) \circ Mia = Mia \circ Mia = Ana \dots\dots 2p$

Legea nu este comutativă ( Tablă asimetrică ) și nu admite element neutru  $\dots\dots\dots 1p$

4.  $f$  continuă pe  $\mathbb{R}$ , deci primitivabilă  $\dots\dots\dots 1p$

Calcul  $\int (x^2 + x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C \dots\dots\dots 1p$

Calcul  $\int x \sin x dx = \int x(-\cos x)' dx = -x \cos x + \sin x + C \dots\dots\dots 2p$

Finalizare cu de exemplu  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}, & x < 0 \\ -x \cos x + \sin x, & x \geq 0 \end{cases} \dots\dots\dots 3p$