OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Faza locală - 16.02.2019
Clasa a V-a
Barem

1. Se consideră numărul $n =$ 1234567891011 ... 201720182019.

a) Stabiliți câte cifre are numărul *n*.

b) Determinați care este a 2021 – a cifră a numărului n.

Barem:

a) Numărul de cifre la numele formate dintr-o cifră: $9\cdot 1 = 9$ ……………………………1p
Numărul de cifre la numele formate din două cifre: $90\cdot 2 = 180$ ………………………1p
Numărul de cifre la numele formate din 3 cifre: $900\cdot 3 = 2700$ …………………………1p
Numărul de cifre la numele de la 1000 la 2019: $1020\cdot 4 = 4080$ ………………………1p
Numărul de cifre ale lui n este 9 + 180 + 2700 + 4080 = 6969……………………..……1p

b) [2021 – (9 + 180)] : 4 = 458 …………………………………………………………..…1p
A 2021- a cifră a numărului *n* este ultima cifră a numărului 1457, anume cifra 7.........1p

2. Dovediți că $2^{501} < 5^{301} - 3^{401}$.

Barem:

$2^{501} < 5^{301} - 3^{401} \Leftrightarrow 2^{501} + 3^{401} < 5^{301} \Leftrightarrow 2\cdot 2^{500} + 3\cdot 3^{400} < 5\cdot 5^{300} \Leftrightarrow 2\cdot 2^{500} + 3\cdot 3^{400} < (2+3)\cdot 5^{300} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\cdot 2^{500} + 3\cdot 3^{400} < 2\cdot 5^{300} + 3\cdot 5^{300}$ 2p

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 2^{500} = 2\cdot\left(2^5\right)^{100} = 2\cdot 32^{100} \\ 2\cdot 5^{300} = 2\cdot\left(5^3\right)^{100} = 2\cdot 125^{100} \\ 2\cdot 32^{100} < 2\cdot 125^{100} \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 2^{500} < 2\cdot 5^{300}$$ 2p

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot 3^{400} = 3\cdot\left(3^4\right)^{100} = 3\cdot 81^{100} \\ 3\cdot 5^{300} = 3\cdot\left(5^3\right)^{100} = 3\cdot 125^{100} \\ 3\cdot 81^{100} < 3\cdot 125^{100} \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot 3^{400} < 3\cdot 5^{300}$$ 2p

Finalizare 1p

3. Dacă împărțim numărul natural *a* la 4, 5 și 6 se obțin resturile 3, 1, respectiv 5. Determinați restul împărțirii numărului *a* la 60.

Barem:

$a = 4x + 3$, $a = 5z + 1$, $a = 6y + 5$, cu *x*, *y*, *z* numere naturale 1p
$a = 4x+3 \Rightarrow 15\cdot a = 60\cdot x + 45$, $a = 6y+5 \Rightarrow 10\cdot a = 60\cdot y + 50$ 2p
Adunând membru cu membru relațiile obținem $25\cdot a = 60\cdot(x+y)+95$ 1p
$a = 5z+1 \Rightarrow 24\cdot a = 60\cdot 2z + 24$ 1p
$a = 60\cdot(x+y-2z+1)+11$ 1p
Restul împărțirii numărului *a* la 60 este egal cu 11...1p

4. În anul 1858 în Principatul Moldova au fost tipărite primele timbre (mărci poștale), numite „Cap de Bour", în valoare de 27, 54, 81 și 108 parale. Un filatelist deține o colecție cu mai multe timbre „Cap de Bour" de toate valorile.

a) Poate filatelistul grupa câteva timbre din colecție în așa fel încât valoarea lor totală să fie 2018 parale?

b) Care este cel mai mic numar natural mai mare decat 2018 care să poată fi obținut prin adunarea, eventual repetată, a numerelor 27, 54, 81 și 108 și care este cel mai mic număr de timbre din colecție a căror valoare la parale să fie reprezentată de acel număr?

(Supliment G.M. 11/2018)

Solutie:

a) Presupunând că putem grupa timbrele și notăm cu a, b, c, d numărul timbrelor de 27, 54, 81, respectiv 108 parale din grupare.
$27a+54b+81c+108d = 2018$..1p
$9(3a+6b+9c+12d) = 2018$..1p
Numărul 2018 este divizibil cu 9. Fals. Deci presupunerea este falsă, adică nu putem grupa timbrele astfel..1p

b) Numărul căutat trebuie să fie divizibil cu 9, deci cel mai mic număr căutat este 2025..1p
Pentru a obține un număr cât mai mic de timbre trebuie să alegem timbre cu valoarea mare..1p
Se observă că $2025=18\cdot 108 +81$,..1p
Putem alege 18 timbre de 108 parale și 1 timbru de 81 de parale. Cel mai mic număr de timbre este 19..1p