OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa localã – 16.02.2019

Clasa a VI-a

Barem de corectare şi notare

1. Egalitatea din enunț se mai poate scrie $10a+b+2=(a+2)(b+2)$ **1p**

De unde vom avea $10a=(a+2)(b+2)-(b+2)$, relație care este echivalentă cu $10a=(a+1)(b+2)$ **1p**

Dar numerele $a, a+1$ sunt numere consecutive deci $(a, a+1)=1$..............................**1p**

Deoarece $(a+1)|10a \Rightarrow (a+1)|10$ deci $a+1\in\{1,2,5,10\}$ de unde obținem $a\in\{0,1,4,9\}$ dar a este nenul și deci $a\in\{1,4,9\}$ **1p**

Dacă $a=1$ atunci se obține $b=3$, dacă $a=4$ atunci se obține $b=6$, $a=9$ atunci se obține $b=7$ **2p**

Obținem în final $\overline{ab}\in\{13,\ 46,\ 97\}$ **1p**

2. Vom calcula mai întâi suma numerelor înscrise pe cele 14 bile

$S=1+2+3+6\cdot1+6\cdot2+6\cdot2^2+...+6\cdot2^{10}=6\left(1+1+2+2^2+...+2^{10}\right)=$

$6\cdot\left(\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{1+1}_{2}+2}_{2^2}+2^2}_{2^3}+...2^9}_{2^{10}}+2^{10}\right)=6\cdot\left(2^{10}+2^{10}\right)=6\cdot2^{11}=6\cdot2^{10}+6\cdot2^{10}$ **2p**

Deci numărul înscris pe ultima bilă $6\cdot2^{10}$ este egal cu suma numerelor înscrise pe celelalte 13 bile...**1p**

În concluzie un caz favorabil conține obligatoriu bila $6\cdot2^{10}$ și una din celelalte 13, adică vom avea 13 cazuri favorabile...**1p**

Numărul total de cazuri $(14\cdot13):2=13\cdot7$ **2p**

Probabilitatea căutată este P = $\frac{13}{13\cdot7}=\frac{1}{7}$ **1p**

3. Pentru ușurința calculului vom nota lungimile segmentelor $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$

a). $AC+BD=a+b+b+c=(a+b+c)+b=AD+BC$ ....**2p** b).

$AC \cdot BD = (a+b)(b+c) = ab + ac + b^2 + bc = b(a+b+c) + ac = BC \cdot AD + AB \cdot CD$ **2p**

c). $AN = \dfrac{a+b+c}{2}$, $AM = a + \dfrac{b}{2} = \dfrac{2a+b}{2}$ **2p**

$MN = AN - AM = \dfrac{a+b+c}{2} - \dfrac{2a+b}{2} = \dfrac{c-a}{2} = \dfrac{(c+b)-(a+b)}{2} = \dfrac{BD-AC}{2} = 1$ **1p**

4. a) Unghiurile $\sphericalangle COB$ și $\sphericalangle BOD$ sunt adiacente suplementare, $[OP$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$ iar $[OM$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOD$ de unde $m(\sphericalangle POM) = 90^0$ **1p**

$m(\sphericalangle AOM) = 130^0 \Rightarrow m(\sphericalangle BOM) = 50^0$ **1p**

$m(\sphericalangle BOM) = m(\sphericalangle MOD) = 50^0 \Rightarrow m(\sphericalangle AOD) = 80^0$ **1p**

b). $m(\sphericalangle AOD) = m(\sphericalangle BOC) = 80^0 \Rightarrow m(\sphericalangle POB) = 40^0$ **1p**

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle AOC \text{ opus la vârf cu } \sphericalangle BOD \\ m(\sphericalangle BOD) = 2 \cdot m(\sphericalangle BOM) = 100^0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m(\sphericalangle AOC) = 100^0 \\ \text{în plus } [OQ \text{ este bis.} \sphericalangle AOC \end{array}\right| \Rightarrow m(\sphericalangle QOC) = 50^0$$ **1p**

$m(\sphericalangle COB) = 80^0$ *iar* $[OP$ este bisectoarea $\sphericalangle COB$, de aici avem că $m(\sphericalangle COP) = m(\sphericalangle POB) = 40^0$

Și $[OR$ este bisectoarea $\sphericalangle POB \Rightarrow m(\sphericalangle POR) = 20^0$ **1p**

Din cele de mai sus avem

$m(\sphericalangle QOR) = m(\sphericalangle QOC) + m(\sphericalangle COP) + m(\sphericalangle POR) = 50^0 + 40^0 + 20^0 = 110^0$ …………….**1p**