OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 16.02.2019
Clasa a VII-a

Soluții și bareme orientative

1. Determinaţi numerele naturale m şi n ştiind că m este prim şi

$$\left|1-\left|\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right|\right|=(-1)^m\cdot\frac{179}{32}.$$

Soluţie.

$|x|\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow(-1)^m>0\Rightarrow m$ – număr par, dar m – prim $\Rightarrow m=2$ ... 1 punct

$$\left|1-\left|\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right|\right|=\frac{179}{32}$$

I. pentru $n=0\Rightarrow\left|1-|1-1|\right|=\frac{179}{32}\Leftrightarrow 1=\frac{179}{32}\ (F)$ ... 1 punct

II. pentru $n\geq 1\Rightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^n-1>0\Rightarrow\left|2-\left(\frac{3}{2}\right)^n\right|=\frac{179}{32}$ ... 1 punct

i) $n=1\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{179}{32}\ (F)$ ... 1 punct

ii) $n\geq 2\Rightarrow 2-\left(\frac{3}{2}\right)^n<0\Rightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^n-2=\frac{179}{32}$ ... 2 puncte

$\left(\frac{3}{2}\right)^n=\frac{243}{32}\Rightarrow n=5$ ... 1 punct

2. Fiecare element al mulțimii $\{2,3,4,\dots,50\}$ se colorează cu câte o culoare respectând regula: dacă un număr are o anumită culoare, atunci orice divizor al său are aceeaşi culoare. Care este numărul maxim de culori care pot fi utilizate?

Soluţie.

Numerele pare au aceeași culoare deoarece îl au pe 2 ca divizor. ... 1 punct

Dacă un număr prim diferit de 2 are o culoare, atunci $2p$ trebuie să aibă aceeaşi culoare cu p, dar şi aceeaşi culoare cu 2. Aşadar, numerele prime p pentru care $2p\leq 50$ au aceeaşi culoare cu 2. ... 1 punct

Numerele prime $p\leq 50$ pentru care $2p\geq 50$ au culori diferite. ... 1 punct

Rezultă că au culori diferite doar numerele prime $29, 31, 37, 41, 43$ şi 47. ... 1 punct

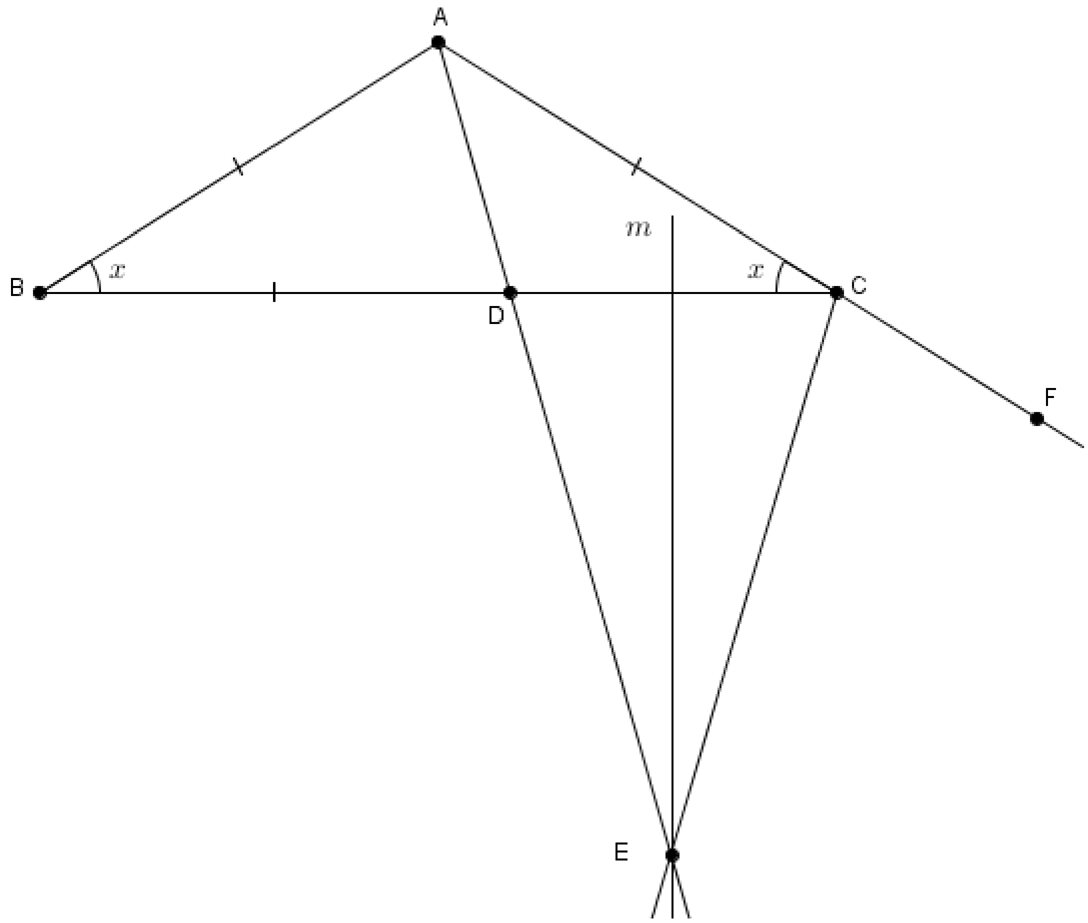
Dacă un număr din mulțimea $\{2,3,4,\dots,50\}$ este par sau impar şi prim mai mic decât 25, atunci are aceeaşi culoare cu 2. ... 1 punct

Dacă un număr din mulțimea $\{2,3,4,\dots,50\}$ este impar dar compus, trebuie să aibă un divizor prim şi impar mai mic decât 25, adică de aceeaşi culoare cu el. ... 1 punct

Numărul maxim de culori este 7. ... 1 punct

3. Fie triunghiul isoscel ABC, $AB = AC$ şi $m(\widehat{BAC}) > 60^\circ$. Considerăm punctul $D \in (BC)$ astfel încât $BD = AC$. Demonstraţi că semidreapta $(AD$ şi mediatoarea segmentului $[DC]$ se intersectează pe bisectoarea unghiului exterior ΔABC cu vârful în C.

Soluţie.



$AB = AC \Rightarrow m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = x$ ... 1 punct

$AB = BD \Rightarrow m(\widehat{BDA}) = \dfrac{180^\circ - x}{2} = 90^\circ - \dfrac{x}{2} = m(\widehat{EDC})$ ... 2 puncte

m – mediatoarea $(CD) \Rightarrow ED = EC \Rightarrow m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{ECD}) = 90^\circ - \frac{x}{2}$ ... 2 puncte

Fie $m \cap AD = \{E\}$ şi $A - C - F$.

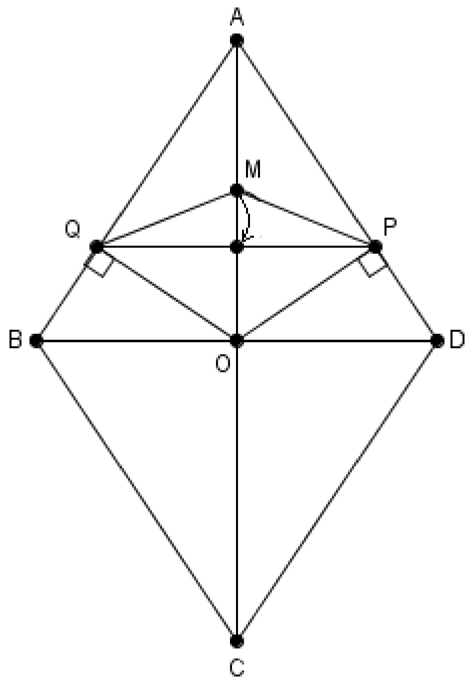
$m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{ECD}) + m(\widehat{ECF}) = 180^\circ$

$x + 90^\circ - \frac{x}{2} + m(\widehat{ECF}) = 180^\circ \Leftrightarrow m(\widehat{ECF}) = 90^\circ - \frac{x}{2} = m(\widehat{ECD}) \Rightarrow$

$(CE$ – bisect. $\widehat{BCF}$. ... 2 puncte

4. Din punctul O, centrul rombului $ABCD$, se duc $OP \perp AD$ și $OQ \perp AB$, $P \in AD$ și $Q \in AB$. Ştiind că $PQ = \frac{AC}{2}$, arătaţi că $ABCD$ este pătrat.

Soluţie.



Fie M – mijl. AO

ΔOPA: $m(\hat{P}) = 90^{\circ}$, PM − mediană $\Rightarrow PM = \frac{AO}{2}$ ... 1 punct

Analog $QM = \frac{AO}{2}$ ... 1 punct

$$\left.\begin{aligned} PM + QM = AO = \frac{AC}{2} \\ PQ = \frac{AC}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow PM + QM = PQ \Rightarrow M \in PQ$$ ... 1 punct

$$\left.\begin{aligned} PM = QM \\ AM = MO \end{aligned}\right\} \Rightarrow AQOP - \text{paralelogram}$$ ... 1 punct

$ABCD$ – romb $\Rightarrow \widehat{PAO} \equiv \widehat{QAO}$

$\Rightarrow AQOP$ − romb ... 1 punct

dar $m(\widehat{OPA}) = 90^{\circ}$, deci $AQOP$ − pătrat ... 1 punct

$AQOP$– pătrat $\Rightarrow$ $m(\widehat{PAQ}) = 90^{\circ}$, dar $ABCD$ – romb $\Rightarrow ABCD$ – pătrat ... 1 punct

Notă: Orice altă soluție se va puncta în mod corespunzător.