OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - 16.02.2019
Clasa a VIII-a
Soluţii şi barem

1. $4x^2+4x+1+y^2-12y+36=49$ **(2p)**

$(2x+1)^2+(y-6)^2=49$ **(1p)**

$(2x+1)^2 \le 49 <=> |2x+1| \le 7 <=> -7 \le 2x+1 \le 7 <=> -4 \le x \le 3 <=> x \in [-4,3]$ **(2p)**

$(y-6)^2 \le 49 <=> |y-6| \le 7 <=> -7 \le y-6 \le 7 <=> -1 \le y \le 13 <=> x \in [-1,13]$ **(2p)**

2. a) $x < m_g <=> x < \sqrt{xy} <=> x^2 < xy <=> 0 < x(y-x)$ (Adevărat) **(1p)**

$m_g < m_a <=> \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} <=> 4xy < (x+y)^2 <=> 0 < (y-x)^2$ (Adevărat) **(2p)**

$m_a < y <=> \frac{x+y}{2} < y <=> x < y$ (Adevărat) **(1p)**

b) $m_g = \frac{x+m_a}{2} <=> 2\sqrt{xy} = x + \frac{x+y}{2} <=> 4\sqrt{xy} = 3x+y$ **(1p)**

$16xy = 9x^2+6xy+y^2 <=> 9x^2-10xy+y^2=0 <=> (x-y)(9x-y)=0$ **(1p)**

Deoarece $x<y$ rezultă că $9x=y <=> \frac{y}{x}=9$ **(1p)**

3. a) Fie O centrul feței $(ABCD)$

Din $DD' \perp (ABCD) => DD' \perp AO$ și cum $AO \perp BD$ $=> AO \perp (BDD')$ **(1p)**

Atunci $pr_{(BDD')}AD' = OD' => m(S(AD',(BDD'))) = m(S\,AD'O)$ **(2p)**

În $\Delta AD'O$ cu $m(S\,O)=90^\circ$ avem $AO = \frac{AD'}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} => m(S\,AD'O) = 30^\circ$ **(1p)**

b) În tetraedrul $AB'CD'$ toate muchiile au lungimea $a\sqrt{2}$, adică $AB'CD'$ este regulat **(2p)**

Distanța cerută este înălțimea tetraedrului, adică $\frac{l\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{2}\sqrt{6}}{3} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ **(1p)**

Str. Dornei nr. 5, Focşani, 620162
tel: 0237214141, fax: 0237214499
e-mail:isjvrancea@yahoo.com,
http://isjvn.vn.edu.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

4. Termenii sumei sunt de forma $\frac{1}{k^2-(2k+2)^2+(k+2)^2}$ cu $k=1,2,...,98$ **(1p)**

$$\frac{1}{k^2-(2k+2)^2+(k+2)^2}=\frac{1}{-2k^2-4k}=-\frac{1}{2k(k+2)}$$ **(1p)**

Atunci $-4S=\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 4}+...+\frac{2}{98\cdot 100}$ **(2p)**

$$-4S=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{98}-\frac{1}{100}$$ **(2p)**

Fie $-4S=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{99}-\frac{1}{100} \Rightarrow S=-\frac{49\cdot 299}{4\cdot 99\cdot 100}$ **(1p)**